WARTOŚĆ SHAPLEYA DLA GIER Z EFEKTAMI ZEWNĘTRZNYMI I GIER NA GRAFACH

AUTOREFERAT

OSKAR SKIBSKI

9 CZERWCA 2014

Problem sprawiedliwego podziału zysku z kooperacji jest jednym z podstawowych zagadnień teorii gier koalicyjnych. Jest on powiązany z szeroką gamą ekonomicznych i społecznych sytuacji, od dzielenia kosztów oczyszczalni ścieków, przez dzielenie zysku pomiędzy współpracującymi przedsiębiorstwami, na wyznaczaniu siły w głosowaniach kończąc. Zakładając, że koalicja wszystkich graczy (czyli *wielka koalicja*) zostanie utworzona, Shapley [20] zdefiniował unikalny system podziału, nazywany wartością Shapleya, który spełnia cztery intuicyjne aksjomaty: dystrybuuje całą wypłatę wśród graczy (*Efektywność*) w liniowy sposób (*Addytywność*), traktując symetrycznych graczy równo (*Symetria*) oraz ignorując tych bez wpływu na wypłaty (*Aksjomat Gracza-Zerowego*).

Wartość Shapleya została pierwotnie zdefiniowana dla klasycznych gier koalicyjnych, które są zbudowane na dwóch prostych założeniach: każda grupa graczy może powstać i wartość każdej koalicji może być określona jako liczba rzeczywista w pełni niezależnie od wartości innych koalicji. Prostota tego modelu, w niektórych przypadkach będąca siłą, często staje się także ograniczeniem. Klasyczny model jest bowiem zbyt prosty, aby odpowiednio odzwierciedlać niektóre realne sytuacje.

Cel tej rozprawy jest dwojaki:

- **Część I. Rozszerzenie wartości Shapleya do gier z efektami zewnętrznymi**
  W literaturze zostało zaproponowanych kilka rozszerzeń wartości Shapleya. Jednym z ciekawszych kierunków badań jest problem rozszerzenia jej do gier, w których uwzględnianie są efekty zewnętrzne powstałe z łączenia się koalicji. Efekty te, sformalizowane w modelu Thralla i Lucasa [25], występują we wszystkich sytuacjach, w których wartość grupy zależy nie tylko od jej członków, ale także od układu innych graczy. Innymi słowy – istnieje *zewnętrzny* wpływ na wartość grupy. W rzeczywistości efekty zewnętrzne są powszechne w wielu realnych sytuacjach np. połączenie dwóch przedsiębiorstw wpływa na zysk ich konkurenta. W takich środowiskach cztery aksjomaty zaproponowane przez Shapleya nie są jednak wystarczające, aby implikować unikalną wartość. Przez ostatnie pięćdziesiąt lat problem rozszerzenia wartości Shapleya do gier z efektami zewnętrznymi nie został rozwiązany. Ten temat jest przedmiotem Części I naszej pracy.

- **Część II. Algorytmy dla wartości Shapleya w grach ograniczonych grafem**
  W Części II odchodzimy od gier z efektami zewnętrznymi i badamy gry na grafach. W modelu wprowadzonym przez Myersona [16], który będziemy nazywać grami ograniczonymi grafem (ang. *graph-restricted games*), agenci (lub gracze) mogą komunikować się i kooperować tylko z agentami, których znają lub z którymi są połączeni. Takie ograniczenia pojawiają się w analizie sieci społecznych, jak również w sieciach sensorowych, telekomunikacji czy umowach handlowych, co czyni je jednym z najnowszych zastosowań gier koalicyjnych. Jeżeli rozszerzymy grę określoną tylko dla połączonych grup do pełnej gry koalicyjnej, wówczas obliczając wartość Shapleya uzyskamy wartość gracza w grze ograniczonej grafem. Obliczenie wartości Shapleya w ogólności wymaga jednak przejścia wszystkich 2^n koalicji. Zaprojektowanie efektywnego algorytmu dla gier ograniczonych grafem jest celem drugiej części naszej rozprawy.

Gry koalicyjne

Klasycznie model gier koalicyjnych wygląda następująco. Niech N będzie zbiorem graczy. *Koalicją* (oznaczaną S) nazywamy dowolny niepusty podzbiór graczy. *Gra* określona jest przez funkcję v, która przypisuje każdej koalicji liczbę rzeczywistą, czyli $v : 2^N \to \mathbb{R}$. Jak jest przyjęte w literaturze, zakładamy, że koalicja wszystkich graczy (nazywana *wielką koalicją*, ang. *grand coalition*) zostanie utworzona. Wówczas wynikiem gry (albo *wartością gry*) jest pewien podział między graczami osiągniętej wspólnie wypłaty $v(N)$ – φ oznacza wektor wypłat, a φ_i jest udziałem gracza i. Najważniejszy normatywny podział wypłaty został zaproponowany przez Shapleya:

$$SV_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}(v(S) - v(S \setminus \{i\})). \tag{1}$$

Aby wprowadzić gry z efektami zewnętrznymi będziemy potrzebować kilku dodatkowych definicji. *Podział* graczy (oznaczany P), czyli formalnie podział zbioru N, jest zbiorem rozłącznych koalicji, których sumą jest N. Para (S,P), gdzie P jest podziałem N i $S \in P$, nazywana jest *zanurzoną koalicją*. Zbiór wszystkich podziałów oraz zbiór wszystkich zanurzonych koalicji będziemy oznaczać przez $\mathscr{P}(N)$ oraz $EC(N)$.

W klasycznym modelu gier koalicyjnych wartość przypisywana jest każdej koalicji. Pozwala nam to tylko na modelowanie tych środowisk, w których ma ona tę samą wartość niezależnie od układu innych graczy, czyli od tego, jakie inne koalicje zostały utworzone. Aby modelować efekty zewnętrzne, wprowadzamy *gry w postaci funkcji podziału*, w których funkcja v przypisuje liczbę rzeczywistą każdej zanurzonej koalicji, i.e., $v : EC(N) \to \mathbb{R}$.

Część I. Rozszerzenie wartości Shapley do gier z efektami zewnętrznymi

Naturalny wymogiem sprawiedliwego podziału jest to, aby wynagradzał on graczy w grze koalicyjnej zgodnie z ich *wkładem* do zysku pochodzącego ze współpracy. Na przykład w aksjomatyce Shapleya Aksjomat Gracza Zerowego wymusza, aby gracz, który ma zerowy wkład do każdej koalicji w grze, nie otrzymał żadnej wypłaty:

> *Aksjomat Gracza Zerowego*: jeżeli $\forall_{S \subseteq N, i \in S} mc_i(S) = 0$ to $\varphi_i(v) = 0$ dla każdej gry v oraz każdego gracza $i \in N$,

gdzie $mc_i(S)$ oznacza wkład gracza i do koalicji S. Kluczowe jest zatem jak dany wkład mierzymy.

W grach koalicyjnych wkład marginalny gracza do koalicji jest różnicą pomiędzy wartością tej koalicji z graczem i bez gracza:

$$mc_i(S) \stackrel{\text{def}}{=} v(S) - v(S \setminus \{i\}).$$

Może być on zatem rozumiany jako strata poniesiona przez pozostałych graczy z powodu odejścia danego gracza. Bazując na tej intuicji wartość Shapleya jest zdefiniowana, jako średni wkład marginalny gracza liczony po wszystkich możliwych sposobach rozkładu wielkiej koalicji przez kolejne usuwanie graczy jeden po drugim, aż zostanie osiągnięta pusta koalicja. Przy danej kolejności (permutacji) graczy usuwanych wkład jest określony *jednoznacznie*, ponieważ nie ma znaczenia, co gracz robi po opuszczeniu koalicji. Tak nie jest jednak w przypadku gier z efektami zewnętrznymi, gdzie definicja wkładu marginalnego staje się znacznie bardziej skomplikowana.

Gdy występują efekty zewnętrzne, na wartość koalicji opuszczonej przez gracza wpływ może mieć wybór koalicji, z jaką się on połączy. Innymi słowy – wybrana akcja *po opuszczeniu koalicji* może spowodować różne wkłady marginalne gracza do tej koalicji. Jednym ze sposobów uwzględnienia wszystkich tych wartości jest założenie, że gracz może wybrać dołączenie do różnych koalicji z różnymi prawdopodobieństwami—będziemy oznaczali zbiór takich prawdopodobieństw (albo *wag*) przez α:

$$[mc_i^{\alpha}(v)](S,P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{T \in P \setminus \{S\}} \alpha_i(S \setminus \{i\}, \tau_i^T(P))[v(S,P) - v(S \setminus \{i\}, \tau_i^T(P))],$$

gdzie $\tau_i^T(P)$ oznacza podział powstały poprzez przejście gracza i do koalicji T w podziale P. W grach z efektami zewnętrznymi rozkład wielkiej koalicji zgodnie z daną kolejnością graczy może być zatem postrzegany jako proces *stochastyczny*, a nie deterministyczny. Wkład marginalny gracza jest różnicą pomiędzy wartością koalicji z graczem, a *oczekiwaną* wartością koalicji, gdy gracz ją opuści.

W grach z efektami zewnętrznymi nie tylko zdefiniowanie wkładu marginalnego, ale także aksjomatyki dla wartości jest bardziej skomplikowane—można łatwo udowodnić, że standardowe tłumaczenie aksjomatów Shapleya nie implikuje unikalnej wartości. W literaturze zaproponowano wiele metod rozwiązania tego problemu. Niektóre, takie jak [4] i [10], uzyskują unikalność wartości przez modyfikację oryginalnych aksjomatów Shapleya. Inni badacze dodają nowe aksjomaty (a czasem rezygnują z niektórych istniejących), odchodząc coraz bardziej od oryginalnej aksjomatyki. Na przykład Grabish i Funaki użyli Aksjomatu Markowa i Ergodyczności i zmodyfikowali Symetrię oraz Aksjomat Gracza Zerowego [7]. Jeszcze inną metodą jest budowanie rozszerzenia do gier z efektami zewnętrznymi, bazując na alternatywnych, w stosunku do Shapleya, aksjomatykach, takich jak aksjomatyka Myersona [17] oparta na idei zbalansowanych wkładów (ang. *balanced contributions*) czy monotonicznej aksjomatyce Younga [26].

Wyniki: W naszej pracy koncentrujemy się na pierwszej ze wspomnianych metod – badamy jak oryginalne aksjomaty Shapleya mogą być dostosowane do gier z efektami zewnętrznymi, korzystając z definicji wkładu marginalnego sparametryzowanego wagami α:

> *Aksjomat Gracza α-Zerowego*: jeżeli $\forall_{(S,P)\in EC(N),i\in S}[mc_i^{\alpha}(v)](S,P)=0$ to $\varphi_i(v)=0$ dla każdej gry w postaci funkcji podziału v i gracza $i\in N$.

To podejście będziemy nazywać *podejściem marginalnym*.

Do tej pory w literaturze zaproponowanych zostało kilka definicji wag α [4, 10, 3]. Autorzy udowodnili, że adekwatne wzmocnienie aksjomatyki Shapleya implikuje unikalną wartość. Jako przykład proponujemy nową definicję wag α, nazwaną *Marginalnością Stabilną* (ang. *Steady Marginality*), i pokazujemy analogiczną unikalność.[1] Te wyniki dotyczą jednak tylko konkretnych wag. W sposób naturalny pojawia się zatem pytanie, czy unikalność jest osiągalna dla innych wag oraz czy podejścia marginalnego można użyć także do innych wartości. Dotychczas najbardziej ogólny wynik tego typu uzyskany był dla trzeciej metody: Fujinaka [5] udowodnił, że dla każdego α, monotoniczna aksjomatyka Younga sparametryzowana wkładem marginalnym α implikuje unikalną wartość. Analogicznych badań dla standardowej aksjomatyki Shapleya nie ma w literaturze.

Zaczynamy od udowodnienia, że dla każdej α, oryginalna aksjomatyka Shapleya parametryzowana wagami α implikuje unikalne rozszerzenie wartości Shapleya do gier z efektami zewnętrznymi.[2]

Twierdzenie 1. *Istnieje tylko jedna wartość, która spełnia Efektywność, Symetrię, Addytywność oraz Aksjomat Gracza α-Zerowego dla każdego α.*

Wartość tę będziemy nazywać α-wartością. Wyniki z [4, 10], które koncentrują się na dwóch szczególnych wagach α są szczególnymi przypadkami tego ogólnego twierdzenia. Twierdzenie to jest odpowiednikiem rezultatu Fujinaki osiągniętego dla aksjomatyki Younga.

Fundamentalnym pytaniem w związku z α-wartościami jest: które wartości—spośród tych zaproponowanych w literaturze lub ewentualnie potencjalnych nowych—mogą być zdefiniowane jako α-wartości? Kluczowym rezultatem naszych badań jest fakt, że podejście marginalne obejmuje *wszystkie wartości*, które spełniają oryginalne aksjomaty Shapleya i tylko je.

Twierdzenie 2. *Wartość φ może być uzyskana przez podejście marginalne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia Efektywność, Symetrię, Addytywność oraz Aksjomat Gracza Zerowego.*

Następnie analizujemy, jak własności α-wartości tłumaczą się na własności wag α. W szczególności skupiamy się na aksjomatach znanych jako *Słaba Monotoniczność*, *Silna Monotoniczność*, *Silna Symetria* oraz *Silny Aksjomat Gracza Zerowego*. Słaba (Silna) Monotoniczność jest spełniona, jeżeli zwiększenie wartości koalicji z danym graczem nie zmniejsza jego wypłaty (zwiększa jego wypłatę). Pokazujemy, że α-value spełnia Słabą (Silną) monotoniczność wtedy i tylko wtedy gdy wagi są nieujemne (pozytywne).

Lemat 1. *α-wartość spełnia Słabą (Silną) Monotoniczność wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_i(S,P)\geq 0$ ($\alpha_i(S,P)>0$) dla wszystkich znaczących wag.*

[1] Rezultat ten pochodzi z pracy *Steady Marginality: A Uniform Approach to Shapley Value for Games with Externalities* [21].

[2] Wszystkie generalne wyniki dotyczące podejścia marginalnego (Twierdzenia 1-5, Lemat 1, Wniosek 1) pochodzą z pracy *Reconsidering the Shapley Value in Games with Externalities* [24], która została zaproszona do ponownego złożenia do czasopisma Theoretical Economics.

Silna Symetria wymusza aby wartość koalicji nie tylko miała symetryczny wpływ na wszystkich jej członków, ale także symetryczny wpływ na wszystkich, którzy członkami nie są. Udowadniamy, że α-wartość spełnia Silną Symetrię wtedy i tylko wtedy, gdy wagi α spełniają następujący warunek: kolejność, w której gracze opuszczają wielką koalicję, nie wpływa na prawdopodobieństwo, że dany podział graczy w końcu powstanie. Mówimy, że wagi α które spełniają ten warunek są *odporne na przeploty* (ang. *interlace resistance*).

Twierdzenie 3. *α-wartość spełnia Silną Symetrię wtedy i tylko wtedy gdy α-marginalność jest odporna na przeploty.*

Wnioskiem z tego rezultatu jest fakt, że *podejście uśredniania* rozszerzające wartość Shapleya do gier z efektami zewnętrznymi, wprowadzone przez Macho-Stadler *et al.* [13], jest podklasą podejścia marginalnego i jest równoważne podejściu marginalnemu z użyciem odpornych na przeploty wag.

Silny Aksjomat Gracza Zerowego mówi, że gracz, który nie ma wpływu na wartości w grze, nie ma wpływu na wypłaty innych—to znaczy jeżeli usuniemy gracza zerowego z gry, wypłaty innych graczy się nie zmienią. Pokazujemy, że jeżeli α-wartość spełnia Silną Symetrię, to spełnia Silny Aksjomat Gracza Zerowego wtedy i tylko wtedy, kiedy wagi α spełniają następujący warunek: prawdopodobieństwo dołączenia do danej koalicji zależy tylko od innych koalicji w podziale, a nie od opuszczanej koalicji. Ten warunek dla wag α nazywamy *odpornością na rozszerzanie* (ang. *expansion resistance*).

Twierdzenie 4. *Załóżmy, że α-wartość spełnia Silną Symetrię. Wówczas α-wartość spełnia Silny Aksjomat Gracza Zerowego wtedy i tylko wtedy, gdy α-marginalność jest odporna na rozszerzanie.*

Mimo, że własności odporności na przeploty i rozszerzanie mogą wydawać się na pierwszy rzut oka nieco nieuzasadnione, są kluczem do zrozumienia relacji pomiędzy α-parametryzowaną aksjomatyką Shapleya, a aksjomatyką Myersona opartą na koncepcji zbalansowanych wkładów rozszerzoną do gier z efektami zewnętrznymi. Dokładniej, pokazujemy, że α-wartość spełnia aksjomaty Myersona wtedy i tylko wtedy, gdy α są odporne na przeploty i rozszerzenie.

Twierdzenie 5. *Aksjomatyka Shapleya (Efektywność, symetria, Addytywność oraz Aksjomat Gracza α-Zerowego) jest równoważna aksjomatyce Myersona (Efektywność, Zbalansowane α-Wkłady) wtedy i tylko wtedy, gdy α jest odporna na przeploty i rozszerzanie.*

Nasza praca łączy się z wynikami Fujinaki [5], który studiował aksjomatykę Younga i sformułował ogólne twierdzenie: dla każdej definicji wkładu marginalnego istnieje unikalna wartość, która spełnia Efektywność, Symetrię oraz Aksjomat α-Marginalny [5]. Dla każdego α, wartość uzyskana przez Fujinakę w oparciu o aksjomatykę Younga jest równa naszej wartości. To oznacza, że obie aksjomatyki są tożsame.

Wniosek 1. *Aksjomatyka Shapleya (Efektywność, Symetria, Addytywność oraz Aksjomat Gracza α-Zerowego) jest równoważna aksjomatyce Younga (Efektywność, Symetria oraz Aksjomat α-Marginalny). Ponadto obie aksjomatyki implikują unikalną wartość.*

Na koniec prezentujemy pierwszy – według naszej wiedzy – aproksymacyjny algorytm do obliczania rozszerzonych wartości Shapleya.[3] Prezentujemy ogólny schemat algorytmu, który

[3] Algorytm ten pochodzi z pracy *The Shapley axiomatization for values in partition function games* [23].

działa dla każdej α-wartości. Nasz algorytm bazuje na metodzie Monte-Carlo. W grach bez efektów zewnętrznych naturalną metodą aproksymacji jest losowanie dowolnej permutacji i doliczanie adekwatnego wkładu marginalnego gracza. W grach z efektami zewnętrznymi losujemy nie tylko permutacje, ale także podział graczy. Dla podziałów rozkład prawdopodobieńsywa jest wyznaczany przez wagi α i silnie zależy od aproksymowanej wartości. Dlatego dla każdej istniejącej definicji α wskazujemy, jak wybrać podział z odpowiednim rozkładem prawdopodobieństwa. W szczególności proponujemy nową metodę wyboru losowej permutacji, która potrzebna jest do obliczenia wartości Hu i Yanga.

Część II. Algorytmy dla wartości Shapleya w grach ograniczonych grafem

Podczas gdy klasyczny model gier koalicyjny zakłada, że każda koalicja może zostać utworzona i może mieć dowolną wartość, istnieje wiele realistycznych sytuacji, w których to założenie nie jest prawdziwe. Agenci często mogą komunikować się i współpracować tylko z użyciem ograniczonej liczby dwustronnych połączeń. Jeżeli nie ma bezpośredniego połączenia między dwoma agentami, współpraca może wciąż być możliwa poprzez pośrednika lub większą ich liczbę. Jednak gdy nie istnieje ani bezpośrednie, ani pośrednie połączenie pomiędzy agentami, nie mogą oni koordynować swoich działań.

Ważne podejście do reprezentowania takich sytuacji zostało wprowadzone przez Myersona [16], który opisał grę koalicyjną na grafie $G = (V, E)$ w którym wierzchołki V reprezentują graczy (agentów), a krawędzie E – kanały komunikacji pomiędzy nimi. Model ten nazywamy *grą ograniczoną grafem*. W grze ograniczonej grafem tylko połączone koalicje mogą mieć przypisaną dowolną wartość. Mówimy, że koalicja jest połączona, jeśli istnieje ścieżka w grafie pomiędzy dwoma dowolnymi członkami koalicji (czyli podgraf indukowany przez członków koalicji jest spójny). Będziemy oznaczali zbiór wszystkich połączonych koalicji $\mathscr{C}(G)$ (lub $\mathscr{C}$ kiedy graf G jest znany z kontekstu). Aby sformalizować nasz model rozważmy najpierw funkcję v_G zdefiniowaną tylko dla połączonych koalicji:

$$v_G : \mathscr{C}(G) \to \mathbb{R} \text{ and } \forall_{S \in \mathscr{C}(G)} v_G(S) = v(S).$$

Ta definicja może być rozszerzona aby uwzględnić także niepołączone koalicje; można to zrobić na dwa sposoby:

- Myerson argumentował, że naturalnym podejściem jest traktowanie niepołączonej koalicji jako zbioru połączonych komponentów. Każdy taki komponent S' jest, z definicji, koalicją, w $\mathscr{C}(G)$ której członkowie mogą uzyskać wypłatę $v_G(S') = v(S')$. Te rozważania prowadzą do następującej funkcji charakterystycznej, zdefiniowanej zarówno dla połączonych jak i niepołączonych koalicji [16]:

$$v_G^{\mathscr{M}}(S) = \begin{cases} v(S) & \text{jeżeli } S \in \mathscr{C}(G) \\ \sum_{K_i \in K(S)} v(K_i) & \text{wpp}, \end{cases} \tag{2}$$

  gdzie $K(S)$ oznacza zbiór połączonych komponentów koalicji S, a $\mathscr{M}$ oznacza Myersona. Innymi słowy wypłata możliwa do uzyskania przez niepołączoną koalicję jest sumą wypłat jej połączonych komponentów.

- Niedawno Amer i Gimenez [2] sformalizowali alternatywne podejście do oceny niepołączonych koalicji. Założyli oni, że wszystkie takie koalicje mają wartość 0. Przy tym założeniu funkcja charakterystyczna ma postać:

$$v_G^{\mathscr{A}}(S) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } S \in \mathscr{C}(G) \\ 0 & \text{wpp,} \end{cases} \tag{3}$$

gdzie $\mathscr{A}$ oznacza Amera i Gimeneza. Ta funkcja została później rozszerzona przez Lindelaufa et al. [12] do następującej formy:

$$v_G^{f}(S) = \begin{cases} f(S,G) & \text{jeżeli } S \in \mathscr{C}(G) \\ 0 & \text{wpp,} \end{cases} \tag{4}$$

gdzie f jest dowolną funkcją.

Ponieważ $v_G^{\mathscr{M}}$ oraz $v_G^{\mathscr{A}}$ są zdefiniowane na wszystkich $2^{|V|}$ koalicjach, wartość Shapleya może być zastosowana jako rozwiązanie dla obu funkcji. Wartość Shapleya obliczona dla pierwszej gry, $SV_i(v_G^{\mathscr{M}})$ jest nazywana *wartością Myersona* i będzie oznaczana $MV_i(v_G)$. W szczególności Myerson pokazał, że wartość ta jest jedyną wartością, która jest efektywna i nagradza każdych dwóch połączonych agentów równo za fakt istnienia połączenia między nimi. Wartość Shapleya policzona dla drugiej funkcji, w której tylko połączone koalicje mają niezerową wartość, będziemy nazywać wartością Shapleya w grach ograniczonych grafem.

Obliczenie obu wartości jest trudne [14, 1]. Dla wartości Shapleya w grach ograniczonych grafem Michalak et al. niedawno zaproponował pierwszy dedykowany algorytm [14]. Dla wartości Myersona aspekty obliczeniowe były rozpatrywane w szczególnych klasach grafów i/lub gier. Do dnia dzisiejszego żaden algorytm do obliczania wartości Myersona dla dowolnego grafu nie został zaproponowany.

Wyniki: W tej części rozprawy opracowujemy dwa efektywne algorytmy: jeden do obliczania wartości Shapleya, a drugi do obliczania wartości Myersona. Jak już powiedzieliśmy, w ogólności obliczenie wartości Shapleya wymaga rozpatrzenia $2^{|V|}$ koalicji. Z naszej analizy wynika jednak, że przejście połączonych koalicji wystarczy do policzenia wartości Shapleya w grach ograniczonych grafem dla obu definicji funkcji charakterystycznej (patrz twierdzenia poniżej). A zatem szybki algorytm enumerujący wszystkie połączone koalicje jest podstawą, na której zbudujemy nowe algorytmy.

Jako, że w naszym modelu połączone koalicje to zbiory wierzchołków, które indukują spójny podgraf, to znalezienie wszystkich połączonych koalicji oznacza znalezienie wszystkich indukowanych spójnych podgrafów grafu – jedno z fundamentalnych operacji w teorii grafów. W tej rozprawie proponujemy nowy algorytm dedykowany do tego celu.[4]

Ogólnie mówiąc nasz algorytm $DFSEnumerate$ przechodzi graf w porządku przeszukiwania w głąb (DFS) i używa techniki *dziel i zwyciężaj*. Zaczynamy z jednego wierzchołka i staramy się rozszerzyć go do większego spójnego podgrafu. Za każdym razem gdy nowy wierzchołek jest analizowany, rozpatrujemy wszystkie jego krawędzie jedna po drugiej i kiedy znajdziemy

[4] Algorytm do enumerowania idnukowanych spójnych podgrafów i algorytmy dla wartości Myersona i Shapleya w grach ograniczonych grafem, a także Lemmaty 2-3 i Twierdzenia 6-7 pochodzą z pracy *Algorithms for the Myerson and Shapley values in graph-restricted games* [22].

nowy—jeszcze nie odkryty—wierzchołek dzielimy obliczenia na dwie części: w pierwszej dodajemy ten wierzchołek do podgrafu; w drugiej zaznaczamy wierzchołek jako zakazany i nigdy więcej do niego nie wchodzimy. Pierwsza część enumeruje zatem podgrafy z wierzchołkiem, a druga – bez niego.

Do tej pory najszybszym istniejącym algorytmem do enumerowania indukowanych spójnych podgrafów był *EnumerateCSG*, zaproponowany przez Moerkotte'a i Neumanna[15]. W przeciwieństwie do naszego algorytmu, który przechodzi drzewo w głąb, algorytm Moerkotte'a i Neumanna wykorzystuje wyszukiwanie wszerz (BFS). Oba algorytmy działają w czasie liniowym względem liczby spójnych podgrafów w grafie. Mimo to, nasze doświadczenia pokazują, że nasz nowy algorytm wyprzedza algorytm oparty na BFS dwa lub nawet trzy razy. Aby wesprzeć nasze wyniki doświadczalne, oferujemy dwa lematy, które pokazują, że nasz algorytm dla kliki wykonuje około dwa razy mniej kroków (badanie krawędzi jest kluczowym elementem głównych pętli w obu algorytmach).

Lemat 2. *EnumerateCSG sprawdza krawędź* $2^{n-1}(n^2-3n+2)+(n-1)$ *razy dla n-kliki.*

Lemat 3. *DFSEnumerate sprawdza krawędź* $2^{n-2}(n^2-n+4)-(n+1)$ *razy dla n-kliki.*

Ponadto pokazujemy także, że w odróżnieniu od enumerowania wszerz, nasz algorytm może łatwo zbierać dodatkowe informacje o enumerowanych grafach, co jest kluczową obserwacją dla naszego pierwszego algorytmu.

Bazując na powyższym algorytmie, proponujemy nowy algorytm do obliczania wartości Shapleya dla gier ograniczonych grafem. Nasz algorytm jest oparty na następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 6. *Wartość Shapleya dla gry* ν_G^f *spełnia następującą formułę:*

$$SV_i(\nu_G^f) = \sum_{S \in \mathscr{C}} mc_i(S),$$

gdzie $mc_i(S)$ *oznacza*

$$mc_i(S) = \begin{cases} \xi_S\, f(S) & \text{jeżeli } v_i \in S \text{ i } S \setminus \{v_i\} \notin \mathscr{C}, \\ \xi_S\, \big(f(S) - f(S \setminus \{v_i\})\big) & \text{jeżeli } v_i \in S \text{ i } S \setminus \{v_i\} \in \mathscr{C}, \\ -\xi_{S \cup \{x_i\}}\, f(S) & \text{jeżeli } v_i \notin S \text{ i } S \cup \{v_i\} \notin \mathscr{C}, \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że kluczowe jest nie tylko znalezienie wszystkich spójnych indukowanych podgrafów, ale także określenie wierzchołków rozspójniających (wierzchołków, których usunięcie rozspójnia podgraf) oraz sąsiadów każdego spójnego podgrafu. O ile sąsiadów łatwo jest znaleźć, szukanie wierzchołków rozspójniających jest trudniejszych zadaniem. Na tym tle proponujemy pierwszy dedykowany algorytm, który nie tylko wylicza wszystkie spójne podgrafy, ale w tym samym czasie identyfikuje wierzchołki rozspójniające w każdym z nich. Aby było to możliwe, nasz algorytm przechodzi graf zgodnie z kolejnością przeszukiwania w głąb (tak jak opisaliśmy powyżej) i w tym samym czasie aplikuje algorytm do szukania wierzchołków rozspójniających, którego autorami są Hopcroft and Tarjan [9]. W końcu pokazujemy, że nasz algorytm jest szybszy niż jedyny istniejący w literaturze opisany przez Michalaka *et al.* [14].

Zajmijmy się teraz algorytmem do obliczania wartości Myersona. Zgodnie z naszą wiedzą, jest to pierwszy algorytm w literaturze dla dowolnego grafu. Tutaj algorytm jest oparty na następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 7. *Wartość Myersona dla gry ograniczonej grafem spełnia następującą formułę:*

$$MV_i(v_G) = \sum_{S \in \mathscr{C}, v_i \in S} \zeta_1 \, v(S) - \sum_{\substack{S \in \mathscr{C}, v_i \notin S \\ S \cup \{v_i\} \in \mathscr{C}}} \zeta_2 \, v(S),$$

gdzie

$$\zeta_1 = \frac{(|S|-1)!|\mathscr{N}(S)|!}{(|S|+|\mathscr{N}(S)|)!}, \quad \zeta_2 = \frac{|S|!(|\mathscr{N}(S)|-1)!}{(|S|+|\mathscr{N}(S)|)!}$$

oraz $\mathscr{N}(S)$ *oznacza sąsiadów koalicji S.*

W tym wypadku nasz algorytm przechodzi wszystkie połączone koalicje i dla każdego członka i sąsiada koalicji aktualizuje wartość Myersona zgodnie z powyższym wzorem.

Testujemy oba algorytmów na ciekawej aplikacji. Obecnie istnieje duże zainteresowanie możliwością zastosowania technik analizy sieci społecznych w celu badania organizacji terrorystycznych [19]. Szczególną uwagę zwrócono na problem identyfikacji kluczowych terrorystów – pomaga to nie tylko zrozumieć hierarchię w ramach tych organizacji, ale także na bardziej efektywne zarządzaniem ograniczonymi środkami wywiadu [11]. Jednym z możliwych rozwiązań tego problemu jest próba wywnioskowania znaczenie różnych osobników, bazując na topologii sieci terrorystycznej. W teorii grafów ten cel może być osiągnięty na wiele sposobów, w zależności od przyjętej *miary centralności*, czyli przyjętej metody do mierzenia ważności wierzchołka w grafie, bazując na samej topologii. Wielu badaczy zaproponowała włączenie technik teorii gier do istniejących miar centralności [8, 6]. W szczególności Lindelauf *et al.* [12] starał się zaprojektować miarę centralności, która bierze pod uwagę dwie rzeczy: rolę terrorystów w łączeniu sieci oraz dodatkowe dostępne dane zebrane przez wywiad. W tym celu Lindelauf *et al.* proponował użyć wartości Shapleya dla gry ograniczonej grafem (według definicji v_G^f) .

Nasz dedykowany algorytm pozwala na przeprowadzenie analizy wrażliwości miary Lindelauf *et al.* Nasze wyniki sugerują, że dla sieci rzadkich, do których zwykle należą sieci terrorystyczne [11], czynnik łączenia sieci jest nadmiernie reprezentowany. W rezultacie możemy stwierdzić, że dane wywiadu prawie w ogóle nie wpływają na ranking. Na tym tle proponujemy, aby używać wartości Myersona zamiast wartości Shapleya jako miary centralności i pokazujemy, że jest ona bardziej odpowiednia dla tego zastosowania.

Na koniec podnosimy temat aproksymacji wartości Shapleya dla gier ograniczonych grafem. W wielu sytuacjach nawet najszybszy dokładny algorytm nie zwróci wyniku w sensownym czasie. W tym celu proponujemy algorytm aproksymacyjny dla wartości Shapleya w grach ograniczonych grafem oraz dla dwóch bardziej skomplikowanych definicji funkcji charakterystycznych pochodzących z *miary strażników* (ang. *gatekeepers metric*).[5]

[5] Algorytm aproksymacyjny dla wartości Shapleya w grach ograniczonych grafem pochodzi z pracy *Computational Analysis of Connectivity Games with Applications to the Investigation of Terrorist Networks* [14]. Algorytm aproksymacyjny dla miary strażników pochodzi z pracy *A Shapley value-based approach to determine gatekeepers in social networks with applications* [18].

Literatura

[1] E. Algaba, J. Bilbao, J. Fernández, N. Jiménez, and J. López. Algorithms for computing the myerson value by dividends. *Discrete Mathematics Research Progress*, pages 1–13, 2007.

[2] R. Amer and J. M. Giménez. A connectivity game for graphs. *Mathematical Methods of Operations Research*, 60:453–470, 2004.

[3] E. Bolger. A set of axioms for a value for partition function games. *International Journal of Game Theory*, 18(1):37–44, 1989.

[4] K. P. Do and H. Norde. The Shapley value for partition function form games. *International Game Theory Review*, 9(02):353–360, 2007.

[5] Y. Fujinaka. On the marginality principle in partition function form games. unpublished manuscript, 2004.

[6] D. Gómez, E. González, C. Manuel, G. Owen, M. Del Pozo, and J. Tejada. Centrality and power in social networks: A game theoretic approach. *Mathematical Social Sciences*, 46:27–54, 2003.

[7] M. Grabisch and Y. Funaki. A coalition formation value for games with externalities. Technical Report b08076, Universite Pantheon-Sorbonne (Paris 1), Centre d'Economie de la Sorbonne, 2008.

[8] B. Grofman and G. Owen. A game theoretic approach to measuring degree of centrality in social networks. *Social Networks*, 4:213–224, 1982.

[9] J. Hopcroft and R. Tarjan. Algorithm 447: Efficient algorithms for graph manipulation. *Communications of the ACM*, 16(6):372–378, 1973.

[10] C.-C. Hu and Y.-Y. Yang. An axiomatic characterization of a value for games in partition function form. *SERIEs*, 1(4):475–487, 2010.

[11] V. Krebs. Mapping networks of terrorist cells. *Connections*, 24:43–52, 2002.

[12] R. Lindelauf, H. Hamers, and B. Husslage. Cooperative game theoretic centrality analysis of terrorist networks: The cases of jemaah islamiyah and al qaeda. *European Journal of Operational Research*, 229(1):230 – 238, 2013.

[13] I. Macho-Stadler, D. Perez-Castrillo, and D. Wettstein. Sharing the surplus: An extension of the Shapley value for environments with externalities. *Journal of Economic Theory*, 135(1):339–356, 2007.

[14] T. P. Michalak, T. Rahwan, P. L. Szczepanski, O. Skibski, R. Narayanam, M. J. Wooldridge, and N. R. Jennings. Computational analysis of connectivity games with applications to the investigation of terrorist networks. *Proceedings of IJCAI*, pages 293–301, 2013.

[15] G. Moerkotte and T. Neumann. Analysis of two existing and one new dynamic programming algorithm for generation of optimal bushy join trees without cross products. In *Proceeding of VLDB*, pages 930–941, 2006.

[16] R. Myerson. Values of games in partition function form. *International Journal of Game Theory*, 6:23–31, 1977.

[17] R. Myerson. Conference structures and fair allocation rules. *International Journal of Game Theory*, 9:169–82, 1980.

[18] N. Ramasuri, O. Skibski, H. Lamba, and T. Michalak. A Shapley value-based Approach to Determine Gatekeepers in Social Networks with Applications. In *Proceedings of ECAI*, 2014.

[19] S. Ressler. Social network analysis as an approach to combat terrorism: past, present and future research. *Homeland Security Affairs*, 2:1–10, 2006.

[20] L. Shapley. A value for n-person games. In *Contributions to the Theory of Games*, volume II, pages 307–317. Princeton University Press, 1953.

[21] O. Skibski. Steady marginality: A uniform approach to Shapley value for games with externalities. In *Proceedings of SAGT*, volume 6982 of *LNCS*, pages 130–142. Springer, 2011.

[22] O. Skibski, T. Michalak, T. Rahwan, and M. Wooldridge. Algorithms for the Myerson and Shapley values in graph-restricted games. In *Proceedings of AAMAS*, pages 197–204, 2014.

[23] O. Skibski, T. Michalak, and M. Wooldridge. The Shapley axiomatization for values in partition function games. Technical report, Oxford University, 2013.

[24] O. Skibski, T. Michalak, and M. Wooldridge. Reconsidering the Shapley value in games with externalities. unpublished, 2014.

[25] R. Thrall and W. Lucas. N-person games in partition function form. *Naval Research Logistics Quarterly*, 10:281–298, 1963.

[26] P. Young. Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 14(2):65–72, 1985.